

Dimostrazione del Teorema 3.20 (aritmetica parziale di $\mathbb{R}^*$), pag. 89

Sia $x_0 \in \mathbb{R}^*$ un punto di accumulazione per $X = \text{dom } f \cap \text{dom } g$.

- (i) Dimostriamo che se $f(x) \rightarrow +\infty$ e $g(x)$ è definitivamente limitata inferiormente per $x \rightarrow x_0$, allora $f(x) + g(x) \rightarrow +\infty$ per $x \rightarrow x_0$ (l'altro caso è analogo).

Sia $M \in \mathbb{R}$ qualunque. Per l'ipotesi su g , esiste $K \in \mathbb{R}$ tale che $g(x) \geq K$ definitivamente per $x \rightarrow x_0$. Per l'ipotesi su f , $f(x) > M - K$ definitivamente per $x \rightarrow x_0$. Perciò, per (3.17)-(3.19),

$$f(x) + g(x) > M - K + K = M \quad \text{definitivamente per } x \rightarrow x_0.$$

- (ii) Dimostriamo che se $f(x) \rightarrow +\infty$ e $g(x) \rightarrow \ell \in (0, +\infty)$ per $x \rightarrow x_0$, allora $f(x)g(x) \rightarrow +\infty$ per $x \rightarrow x_0$ (i casi in cui $\ell = +\infty$ o $\ell \in [-\infty, 0)$ sono analoghi).

Sia $M \in \mathbb{R}$ qualunque. Per l'ipotesi su g e il Lemma 3.14, $g(x) > \frac{\ell}{2} > 0$ definitivamente per $x \rightarrow x_0$. Per l'ipotesi su f , $f(x) > 2|M|/\ell$ definitivamente per $x \rightarrow x_0$. Perciò, per (3.17)-(3.19),

$$f(x)g(x) > \frac{2|M|}{\ell} \cdot \frac{\ell}{2} = |M| \geq M \quad \text{definitivamente per } x \rightarrow x_0.$$

- (iii) Dimostriamo che se $f(x) \rightarrow 0$ e $g(x)$ è definitivamente limitata per $x \rightarrow x_0$, allora $f(x)g(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow x_0$.

Sia $\varepsilon > 0$ qualunque. Per l'ipotesi su g , esiste $K > 0$ tale che $|g(x)| < K$ definitivamente per $x \rightarrow x_0$. Per l'ipotesi su f , $|f(x)| < \varepsilon/K$ definitivamente per $x \rightarrow x_0$. Perciò, per (3.17)-(3.19),

$$|f(x)g(x) - 0| = |f(x)||g(x)| < \frac{\varepsilon}{K} \cdot K = \varepsilon \quad \text{definitivamente per } x \rightarrow x_0.$$

- (iv) Dimostriamo che se $f(x) \rightarrow 0^+$ per $x \rightarrow x_0$, allora $1/f(x) \rightarrow +\infty$ per $x \rightarrow x_0$ (il caso in cui $f \rightarrow +\infty$ è analogo).

Sia $M \in \mathbb{R}$ qualunque. Per l'ipotesi su f , $0 < f(x) < 1/|M|$ definitivamente per $x \rightarrow x_0$. Perciò

$$f(x) > 1/|M| \geq M \quad \text{definitivamente per } x \rightarrow x_0.$$